



Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649.

Sébastien Maronne

► To cite this version:

Sébastien Maronne. Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649.. Francesco Marrone. DesCartes et DesLettres. 'Epistolari' e filosofia in Descartes e nei cartesiani, Le Monnier, pp.62-91, 2008. hal-00203097

HAL Id: hal-00203097

<https://hal.science/hal-00203097>

Submitted on 15 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649.

Sébastien MARONNE*

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Deux lectures de la <i>Géométrie</i>	1
1.2	Quatre Géométries	4
1.3	Le problème de Pappus	5
2	La solution de Descartes au problème de Pappus dans la <i>Géométrie</i> de 1637	6
2.1	L'énoncé du problème	6
2.2	Une solution moderne	8
2.3	La solution cartésienne	9
3	Les controverses sur le problème de Pappus après la <i>Géométrie</i> : 1637-1649	15
3.1	La controverse avec Roberval : 1638-1646	20
3.2	La controverse de 1648	25
3.3	La correspondance avec Carcavi de 1649	29

*Université Paris 7-Centre Javelot, Équipe REHSEIS-UMR 7596, 59 rue Nationale, Tour
Montréal 1^{er} étage, Dalle les Olympiades, 75013 Paris. *Adresse postale* : Université Pa-
ris 7-Centre Javelot, Équipe REHSEIS-UMR 7596, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05.
E-mail : sebastien.maronne@orange.fr.

Je tiens à remercier C. Alvarez, G. Belgioioso, E.-J. Bos, H. Bos, J. Dhombres, M. Galuzzi,
V. Jullien, M. Panza, M. Savini, T. Verbeek pour leurs remarques et suggestions. Je dédie
enfin ce texte à mon fils Octave né le 16 décembre 2005.

4 Conclusion	33
Références	34

1 Introduction

1.1 Deux lectures de la *Géométrie*

La *Géométrie* de Descartes de 1637 a suscité des lectures et des réactions s'ordonnant successivement selon deux perspectives.

D'une part, on peut reconnaître dans le traité cartésien une Méthode pour la résolution des problèmes géométriques¹. Le projet central sous-tendant la *Géométrie* consisterait donc à articuler le programme classique de résolution des problèmes géométriques hérité des Anciens et l'algèbre des Modernes².

De ce point de vue, le programme cartésien fut fraîchement accueilli. L'affirmation sans cesse renouvelée par Descartes du caractère implacable de sa Méthode pour résoudre les problèmes se heurta au scepticisme et à l'incompréhension des mathématiciens contemporains, comme Beaugrand, Roberval ou Fermat, accentués par les « omissions » cartésiennes, comme

¹Qu'on pense par exemple à la sentence inaugurale de la *Géométrie* répondant à la conclusion déjà énoncée par Viète dans son *Isagoge* de « Nullum non problema solvere » :

Tous les problemes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 369].

²Descartes écrit ainsi dans le *Discours de la Méthode* :

J'avais un peu étudié, étant plus jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et entre les mathématiques, à l'*analyse des géomètres et à l'algèbre*, trois arts ou sciences qui semblaient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. [...] Puis, pour l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ; et on s'est tellement assujetti, en la dernière, à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur, qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive. Ce qui fut cause que je pensai qu'il fallait chercher quelque autre méthode, qui, comprenant les avantages de ces trois, fût exempte de leurs défauts.

Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 17].

en témoignent les nombreuses controverses qui suivirent la publication de la *Géométrie*³.

D'autre part, on peut reconnaître une nouveauté vraiment originale dans la *Géométrie* de 1637 : l'établissement d'une relation privilégiée entre courbe géométrique et équation algébrique, dont témoigne par exemple l'usage que fait Descartes de l'équation d'une courbe pour résoudre le problème des normales.

De ce point de vue, au contraire, la *Géométrie* connut ensuite une prospérité féconde à travers l'interprétation et l'usage de ses objets et méthodes qui participèrent de la création de théories nouvelles. La définition d'une courbe par une équation et la méthode des normales furent ainsi à l'origine de nombreux développements ultérieurs dans la géométrie analytique et infinitésimale. On sait par exemple que la seconde édition latine de la *Géométrie* constitua une source fondamentale pour Newton dans l'élaboration de sa théorie des fluxions⁴.

On retrouve d'ailleurs ces deux lectures exprimées à travers deux interprétations apparaissant dans le débat historiographique qui a eu lieu ces dernières années au sujet de la *Géométrie* de 1637. La discussion entre Henk Bos et Enrico Giusti tient d'ailleurs précisément à la primauté qu'on devrait donner à l'une ou l'autre de ces deux interprétations de la *Géométrie* pour rendre compte des intentions de son Auteur et de la « structure »⁵ du traité⁶.

Pour Henk Bos, « le but premier de [la *Géométrie*] [est] de procurer une méthode générale pour résoudre des problèmes géométriques, et non d'établir une technique pour étudier des courbes »⁷, tandis qu'au contraire pour En-

³Citons par exemple la controverse sur les tangentes avec Fermat, la controverse sur la solution du problème de Pappus que nous étudions ici, ou bien la controverse avec Beaugrand au sujet de Viète.

⁴Massimo Galuzzi traite ainsi en détail des *marginalia* de Newton à la *Geometria* de 1659-1661 dans [Galuzzi 1990]. Pour une étude sur la méthode des normales de Descartes et la lecture qui en est faite par Newton, on pourra aussi consulter l'ouvrage récent de Marco Panza : [Panza 2005, p. 83-132].

⁵ Cf. l'article de Henk Bos : [Bos 1990].

⁶Pour une présentation des positions de ces deux auteurs suivie d'une interprétation personnelle, on peut consulter l'ouvrage de Vincent Jullien : [Jullien 1996, p. 56-67]. Massimo Galuzzi discute également de l'interprétation plus ancienne et classique de Molland présentée dans [Molland 1976] et de celle de Bos, en considérant en particulier le premier article de l'auteur sur le sujet [Bos 1981], dans son [Galuzzi 1985]. Cf. également [Panza 2005, p. 23-44].

⁷Cf. [Bos 2001, p. 228] et aussi [Bos 1990, p. 352-353].

rico Giusti, « le rapport courbe-équation occupe la position centrale dans la *Géométrie*, déterminant les problèmes et les méthodes, les choix et les exclusions »⁸. Néanmoins, les deux historiens s'accordent pour reconnaître que finalement c'est la seconde interprétation qui prévalut à terme chez les mathématiciens du dix-septième siècle qui lurent la *Géométrie*⁹.

On voit bien que la première de ces deux interprétations inscrit la *Géométrie* de 1637 à l'apogée d'une tradition, tandis que la seconde la place à l'origine d'une postérité. Mais si « la *Géométrie* est dialogue d'un critère à l'autre, d'un versant à l'autre avec des moments de jonction »¹⁰, qu'en est-il de l'œuvre géométrique cartésienne prise dans son ensemble et de celle de ses commentateurs Debeaune, van Schooten ? Si « les deux concepts [de courbe équation et courbe-construction] continueront pendant quelque temps à progresser ensemble »¹¹, ne peut-on pas mettre en évidence, par exemple dans la Correspondance, les étapes qui ont conduit à la prééminence de la seconde interprétation et à la cristallisation de l'objet courbe-équation ?

1.2 Quatre Géométries

L'œuvre mathématique cartésienne dans son élaboration et dans sa réception dépasse en effet largement les bornes du court traité de cent vingt-sept pages censé en procurer le résultat le plus éclatant. Synthèse tardive et empressée, qui satisfaisait néanmoins son auteur, de réflexions longuement éprouvées sur les mathématiques¹², la *Géométrie* n'est que la première de quatre Géométries. À celle-ci, il faut ajouter « la *Géométrie* que Descartes n'a pas publiée »¹³ constituée par les réponses cartésiennes de la Correspon-

⁸Cf. [Giusti 1990, p. 436] et aussi [Giusti 2000, p. 42-43].

⁹Cf. [Bos 2001, p. 227-228] et [Giusti 2000, p. 44].

¹⁰Cf. [Jullien 1996, p. 67].

¹¹Cf. [Giusti 2000, p. 44].

¹²Descartes confesse dans une lettre adressée à un Révérend Père Jésuite datée par Adam-Tannery d'octobre 1637 que la *Géométrie* fut écrite en moins d'un an entre 1635 et 1636 durant l'impression des *Météores* :

C'est vn traitté que ie n'ay quasi composé que pendant qu'on imprimoit mes Meteores, & mesme i'en ay inuenté vne partie pendant ce temps-là ; mais ie n'ay pas laissé de m'y satisfaire, autant ou plus que ie ne me satisfais d'ordinaire de ce que i'ecris.

Cf. [Adam et Tannery, I, p. 458].

¹³Je reprends le titre d'un article de Pierre Costabel : [Costabel 1990].

dance¹⁴ aux sollicitations et critiques portant sur la *Géométrie* et sa Méthode, la première édition latine de 1649 et enfin la seconde édition latine de 1659-1661 publiées toutes deux sous la direction de Frans van Schooten.

Si la *Géométrie* de 1637 a engendré de nombreux commentaires au sein de l'historiographie, une étude des Géométries, considérées comme formant un corpus, celui de la Géométrie cartésienne prise dans son ensemble, n'a pas encore vu le jour. Selon nous, une étude des thèmes de la *Géométrie* à partir de ce corpus étendu pourrait non seulement éclairer le traité cartésien mais permettre aussi la reconstruction d'une histoire de la théorie des courbes géométriques et des équations algébriques depuis 1637 jusqu'à 1649¹⁵.

Pour ce faire, il est nécessaire et essentiel de lire la Correspondance et d'étudier d'une part l'évolution du programme cartésien avec les difficultés qui en découlent, d'autre part la réception de ce programme par les mathématiciens contemporains — adversaires, amis, et disciples —. En effet, la Géométrie de la Correspondance, comme nous essaierons de le montrer dans l'exemple de la résolution du problème de Pappus, porte témoignage de cette histoire et apparaît comme un moyen terme entre la *Géométrie* de 1637 et la *Geometria* de 1649.

Ce faisant, deux questions de « continuité » s'imposent. La première porte sur la continuité entre la *Géométrie* de 1637 et la tradition géométrique grecque et arabe et conduit à essayer de déterminer la nouveauté de la *Géométrie* quant à la relation entre courbe et équation. D'autre part, la seconde question porte sur la continuité qui existe entre les Géométries : *Géométrie* de 1637, Géométrie de la Correspondance, Géométrie de l'édition latine de 1649.

¹⁴D'autres historiens ont remarqué avant nous l'importance de la Correspondance pour étudier la Géométrie de Descartes. Cf. par exemple l'article fondateur [Costabel 1990] déjà cité et [Galuzzi 1985, p. 643 et n. 1 p. 661]. Vincent Jullien a ainsi proposé dans son article [Jullien 1999] une distinction entre la *Géométrie* de 1637 et les « mathématiques extérieures » à la *Géométrie* qu'on trouve dans la Correspondance, relevant d'une pratique plus contingente et traitant de sujets qui n'apparaissent pas nécessairement dans le traité cartésien tels que le problème de la quadrature de la cycloïde. Notre propos est différent dans la mesure où nous considérons uniquement dans la Correspondance les discussions et les thèmes qui prolongent ceux de la *Géométrie*.

¹⁵Ajoutons que des études ponctuelles sur des thèmes essentiels de la *Géométrie* tels que le problème de Pappus, la méthode des normales ou la construction des équations constituent déjà une propédeutique à une étude de plus grande ampleur sur l'ensemble des textes des Géométries, en particulier ceux de la seconde édition latine de la *Géométrie* de 1659-1661. Ce travail initial constitue l'objet de notre thèse. Cf. [Maronne].

Les secondes, comme l'affirme Descartes, ne seraient-elles que de simples éclaircissements de la première, des commentaires, voire des développements de ce qui était déjà présent en 1637 ? Ou, au contraire, celles-ci témoigneraient-elles d'une histoire accompagnée de changements plus ou moins profonds dans les conceptions cartésiennes de la *Géométrie* de 1637, en particulier celles concernant l'usage de l'algèbre dans la résolution des problèmes géométriques et l'étude des courbes ?

Dans la suite, nous apporterons quelques éléments de cette histoire de la *Géométrie* après 1637, qui mettent en évidence des modifications du projet initial, quoiqu'en dise Descartes, apportées à la suite des controverses avec les adversaires tels que Roberval, ou bien des questions posées par les disciples comme Debeaune.

1.3 Le problème de Pappus

Dans ce but, nous proposons d'étudier la solution du problème de Pappus donnée par Descartes dans la *Géométrie* de 1637 à travers les controverses et les réponses cartésiennes apparaissant dans la Correspondance, depuis la publication de la *Géométrie* en 1637 jusqu'en 1649 à l'occasion de la dernière controverse avec Roberval par l'entremise de Carcavi.

Par là, nous entendons éclairer le texte de la *Géométrie* en démontrant qu'il s'inscrit dans une histoire. Cet examen historique constituera la deuxième section de ce travail qui suivra une première partie consacrée à une présentation de la solution cartésienne du problème de Pappus figurant dans la *Géométrie*.

L'histoire que nous entendons donner ici n'est pas seulement l'histoire de la résolution du problème de Pappus. De façon plus profonde, nous la considérons comme une part importante de l'histoire de la théorie cartésienne des courbes algébriques. Plus précisément, si nous nous risquons à une nouvelle étude de ce problème célèbre, c'est parce qu'il nous semble qu'une question aussi essentielle que la correspondance entre équation algébrique et courbe géométrique apparaît comme omniprésente et problématique dans la solution cartésienne au problème de Pappus et les controverses qui suivirent.

De ce point de vue, la reconnaissance et le traitement par Descartes d'une seconde conique solution au problème de Pappus à quatre lignes se révélera comme une pierre de touche. Cette question, qui intervient dans la controverse avec Roberval et possède donc de surcroît une pertinence non seulement épistémologique mais encore historique, apparaît en effet cruciale dans

l'établissement d'une théorie des courbes algébriques englobant la résolution des problèmes de lieu géométrique.

2 La solution de Descartes au problème de Pappus dans la *Géométrie* de 1637

2.1 L'énoncé du problème

Voici comment Descartes présente le problème de Pappus¹⁶ dans le premier livre de la *Géométrie* de 1637 :

La question donc, qui auoit esté commencée a resoudre par Euclide & poursuiuite par Apollonius, sans auoir esté acheuée par personne, estoit telle. Ayant trois, ou quatre, ou plus grand nombre de lignes droites données par position, premierement, on demande vn point duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, vne sur chascune des données, qui facent avec elles des angles donnés ; & que le rectangle contenu en deux de celles qui seront ainsi tirées d'un mesme point, ait la proportion donnée avec le quarré de la troisieme, s'il n'y en a que trois ; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre.

[...] Ou, s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donnée avec le produit des quatre autres. Et ainsi cete question se peut estendre a tout autre nombre de lignes.

Puis, a cause qu'il y a toujours vne infinité de divers poins qui peuvent satisfaire a ce qui est icy demandé, il est aussy requis de connoistre & de tracer la ligne dans laquelle ils doiuent tous se trouuer ;

& Pappus dit que, lorsqu'il n'y a que trois ou quatre lignes droites données, c'est en vne des trois sections coniques ; mais il n'entreprend point de la determiner, ny de la descrire, non plus que d'expliquer celles où tous ces poins se doiuent trouver, lorsque la question est proposée en vn plus grand nombre de lignes. Seule-

¹⁶Le problème de Pappus est ainsi nommé car il est cité dans la *Collection Mathématique* : cf. [Pappus 1982, II, p. 507-510]. Pour plus de détails, on peut consulter par exemple la note de Paul Tannery : [Adam et Tannery, VI, p. 721-725].

ment, il aiouste que les anciens en auoient imaginé vne qu'ils monstroient y estre vtile, mais qui sembloit la plus manifeste, & qui n'estoit pas toutefois la premiere. Ce qui m'a donné occasion d'essayer si, par la methode dont ie me sers, on peut aller aussy loin qu'ils ont esté.¹⁷

Comme on le sait bien, le problème de Pappus fut suggéré par Golius¹⁸ à Descartes à la fin de l'année 1631. Deux lettres de Descartes à Golius, la première datée par Adam-Tannery de janvier 1632, la seconde, du 2 février 1632, en portent témoignage¹⁹. Dans la seconde lettre, Descartes se félicite du « favorable jugement » de Golius sur son analyse du problème²⁰. La première lettre, bien plus détaillée, contient des informations intéressantes sur la solution donnée par Descartes à cette époque²¹.

Afin d'éclairer la solution cartésienne du problème de Pappus à quatre lignes, nous présentons d'abord une solution moderne, puis la solution cartésienne apparaissant dans la *Géométrie* de 1637.

2.2 Une solution moderne

De façon moderne, plaçons-nous dans un repère xOy orthogonal. Soient l_i , $i = 1, \dots, 4$ quatre droites d'équations respectives $a_i x + b_i y + c_i = 0$. Recherchons le lieu des points C de coordonnées (x, y) dont le produit des distances aux droites l_1 et l_3 est égal au produit des distances aux droites l_2 et l_4 . Nommons ces distances d_i , $i = 1, \dots, 4$. On recherche donc le lieu déterminé par

$$d_1 d_3 = d_2 d_4. \quad (1)$$

Or, on a

$$d_i = \pm \frac{a_i x + b_i y + c_i}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}, \quad (2)$$

¹⁷Cf. [Descartes 1637, p. 306-307] et [Adam et Tannery, VI, p. 379-380].

¹⁸Le personnage de Golius est à de nombreux égards intéressant et mystérieux. Professeur de mathématiques et de langues orientales à Leyde, il fit un voyage au Levant en 1625 qui dura quatre ans. À son retour, il rapporta de nombreux ouvrages mathématiques en langue arabe. Il est étrange, comme le note Adam-Tannery, que dans une lettre du 1^{er} mars 1638 à Mersenne, Descartes se plaigne que Golius n'entende pas sa *Géométrie*. Cf. [Adam et Tannery, II, p. 30].

¹⁹Cf. [Adam et Tannery, I, resp. p. 232-234 et 236-237].

²⁰Cf. (*ibid.*, p. 236-237).

²¹Pour plus de détails, on peut consulter le chapitre que consacre Henk Bos à la première étude par Descartes du problème de Pappus : [Bos 2001, Chap. 19, p. 271-283].

le signe du numérateur étant déterminé par la position du point C relativement à la droite l_i .

De façon plus générale, si le repère est oblique d'angle α , et qu'on projette le point C sur la droite l_i selon l'angle α_i , on aura

$$d_i = \pm \frac{(a_i x + b_i y + c_i) \sin \alpha}{\sin \alpha_i \sqrt{a_i^2 + b_i^2 - 2a_i b_i \cos \alpha}}.$$

Dans les deux cas, il apparaît clairement du fait du double signe \pm que la solution du lieu de Pappus est formée par un système de deux coniques. On peut se poser la question de la pertinence historique de ce fait mathématique²² qui apparaît dans notre solution moderne. En effet, comme on va le voir, Descartes ne présente explicitement qu'une conique dans sa solution du problème de Pappus. La question qui se pose est donc double. Descartes a-t-il reconnu la présence de deux courbes algébriques solutions au problème de Pappus et comment cette reconnaissance ou un traitement explicite de cette seconde courbe algébrique solution dépendent-ils de l'existence d'une théorie des courbes algébriques, si elle est bien présente chez Descartes ? Dans quelle mesure ce fait a-t-il été relevé par les mathématiciens contemporains et jugé important voire essentiel par eux pour une résolution entière du problème de Pappus, en particulier dans le cas de quatre lignes ?

Remarquons d'autre part que les courbes sont ici exprimées par une équation relativement à un repère extrinsèque. Au contraire, Descartes choisit un repère intrinsèque²³ au problème géométrique, prenant pour axe la première droite donnée de position et pour angle de projection des ordonnées, l'angle de projection sur cette même droite.

2.3 La solution cartésienne

Intéressons-nous à présent à la solution cartésienne telle qu'elle apparaît dans la *Géométrie* de 1637²⁴. Pour le problème de Pappus à quatre lignes,

²²Paul Tannery a pointé à plusieurs reprises ce fait dans ces notes et éclaircissements en indiquant qu'il avait été ignoré de Descartes. Cf. par exemple [Adam et Tannery, VI, p. 724].

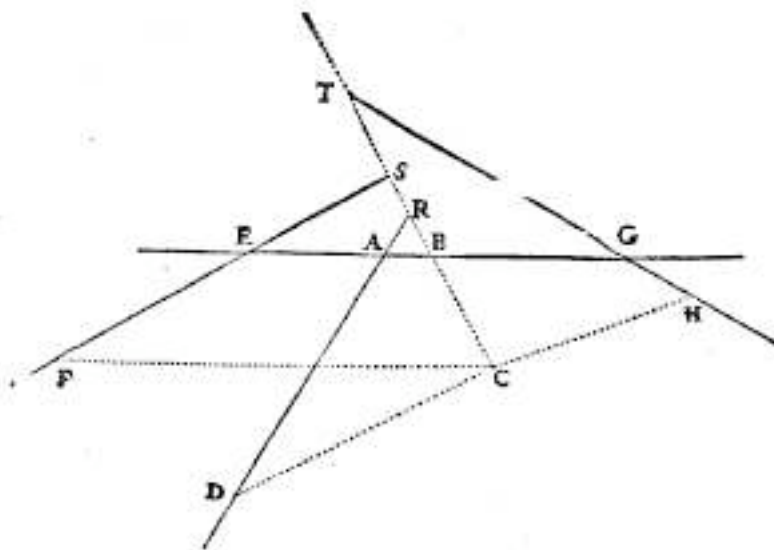
²³ La notion moderne de coordonnées apparaît pour la première fois comme point de départ d'un traitement systématique de la Géométrie dans le premier chapitre du second livre de l'*Introductio in Analysin Infinitorum* selon [Dingeldey, Fabry, et Berzolari, p. 17].

²⁴Pour plus de détails, on peut consulter [Bos 2001, Chap. 23, p. 313-334].

Descartes propose de déterminer le lieu géométrique des points C vérifiant

$$CB \cdot CF = CD \cdot CH, \quad (3)$$

tels que les quatre lignes droites \widehat{AB} , \widehat{AD} , \widehat{EF} et \widehat{GH} sont données de position, et les angles \widehat{CBA} , \widehat{CDA} , \widehat{CFE} et \widehat{CHG} sont donnés de grandeur.

FIG. 1 – *Géométrie*(1637), p. 309 et *Geometria*(1649), p. 14

Décrivons tout d'abord les caractéristiques de la solution cartésienne. Préalablement, Descartes reformule les données du problème en introduisant un repère et des ordonnées : dire que les quatre lignes sont données de position, c'est dire en particulier que les trois dernières sont données de position relativement à la première droite **AB**. Dans la résolution du problème, la position relative des trois dernières lignes l'une par rapport à l'autre n'interviendra à aucun moment. En témoigne l'absence du point d'intersection des droites **AD** et **EF**, ainsi que des droites **EF** et **GH** sur la figure 1 donnée par Descartes, qui sont pourtant des solutions évidentes du problème²⁵.

De ce point de vue, la reformulation cartésienne modifie le problème géométrique original et le rapproche du problème moderne de géométrie analytique, à la différence près du choix du repère intrinsèque lié aux données

²⁵On verra dans la suite que Roberval fera ce reproche à Descartes.

du problème. Il ne restera plus qu'à « rapporter » les trois autres droites du problème à la première des données **AB**, axe du repère, et à la première des inconnues **CB**, qui sera l'ordonnée, autrement dit, à déterminer l'équation de ces droites dans le repère d'axe **AB**, d'origine **A** et d'ordonnées **BC**; ensuite, à déterminer les projetés du point **C** sur ces droites selon les angles donnés. Descartes, pour ce faire, usera du théorème des triangles semblables, et non du théorème de Pythagore comme nous le faisons, dans le cas particulier où les angles donnés sont droits, en considérant alors les distances du point **C** aux droites du problème.

Mais citons Descartes :

Premierement ie suppose la chose comme desia faite & pour me demeler de la confusion de toutes ces lignes, ie considere l'une des données, & l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple **AB**, & **CB**, comme les principales, & ausquelles ie tasche de rapporter ainsi toutes les autres.²⁶

Posons donc $AB = x$ et $BC = y$, coordonnées du point **C** dans le repère dont l'origine est donnée par l'intersection des deux premières droites du problème, **AB** et **AD**.

Supposons que ce point **C** se trouve dans la région délimitée par l'angle **DAG**, c'est à dire une des quatre régions du plan déterminées par l'intersection des deux premières droites **AD** et **AB**.

Descartes montre que chacune des lignes **CD**, **CF** et **CH** peut s'exprimer sous la forme $\pm\alpha y \pm \beta x \pm \gamma$, où α , β et γ sont connues. Il nous suffira de décrire le calcul de **CF** pour en déduire facilement les deux autres.

Voici ce qu'écrit Descartes :

Après cela pource que les lignes **AB**, **AD**, **EF** sont données par position, la distance qui est entre les points **A** & **E** est aussy donnée, & si on la nomme k , on aura **EB** esgal a $k + x$; mais ce seroit $k - x$, si le point **B** tomboit entre **E** & **A**; $-k + x$, si **E** tomboit entre **A** & **B**. Et pource que les angles du triangle **ESB** sont tous donnés, la proportion de **BE** a **BS** est aussy donnée, & ie la pose comme z à d , si bien que **BS** est $\frac{dk+dx}{z}$, & la toute **CS** est $\frac{zy+dk+dx}{z}$, mais ce seroit $\frac{zy-dk-dx}{z}$, si le point **S** tomboit entre **B** & **C**; & ce seroit $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, si **C** tomboit entre **B** & **S**. De plus, les trois angles du triangle **FSC** sont donnés, & en suite la

²⁶Cf. [Descartes 1637, p. 310] et [Adam et Tannery, VI, p. 382-383].

proportion de CS à CF, qui soit comme de z à e , & la toute CF sera $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$.²⁷

Tout d'abord, Descartes reformule la condition géométrique classique énonçant que les trois droites AB, AD et EF sont données de position, en écrivant que l'abscisse du point E d'intersection de la troisième droite EF avec l'axe des abscisses AB est donnée et posée égale à k . Remarquons que pour nous, de façon moderne, l'abscisse du point E et l'abscisse du point C sont de signes opposés. Au contraire pour Descartes qui considère des distances, il n'en est rien. Les lettres ne désignent en effet pour lui que des quantités positives puisqu'elles désignent des segments.

Ainsi, selon la position du point C relativement aux points E et A, connaissant $AE = k$, on peut déduire trois expressions possibles pour EB :

$$EB = \begin{cases} k + x, \\ k - x, \\ x - k. \end{cases}$$

Mais, si nous acceptons qu'une lettre puisse désigner une quantité négative, du fait que AB et AE sont situées de part et d'autre de l'origine A, les abscisses associées seront de signes contraires. La première des trois expressions peut alors être abandonnée et on obtient, comme auparavant, dans notre formulation moderne l'expression

$$EB = \pm(x - k).$$

Mais revenons au calcul de Descartes. Rapporter la droite EF aux droites AB et BC, c'est à dire au repère cartésien, c'est se donner d'espèce le triangle EBS et de façon équivalente une équation de la droite EF dans le repère choisi. Car se donner la proportion

$$BE : BS = z : d$$

est équivalent à se donner l'équation²⁸ de la droite EF

$$dx - zy = dk.$$

En effet, lorsque le point B décrit l'axe AB, le point S décrit la droite EF.

²⁷Cf. [Descartes 1637, p. 311-312] et [Adam et Tannery, VI, p. 383-384].

²⁸On s'est donné ici un sens sur l'axe AB tel que l'abscisse du point C est positive. Dans ce cas, en s'autorisant à désigner par des lettres des quantités négatives, $EB = x - k$.

On comprend bien le choix fait par Descartes du point d'intersection A de la deuxième droite AD avec la première AB, jouant le rôle de l'axe, comme origine du repère. Une fois encore, ce choix est intrinsèque au problème et a pour but de faciliter le calcul. En effet, la droite AD passant par l'origine, on élimine le coefficient constant dans son équation, et donc dans l'expression de CD. La contrepartie est qu'on obtiendra donc l'équation du lieu géométrique solution sans coefficient constant, ce qui nuit à la généralité visée par Descartes²⁹, celui-ci désirant rapporter tous les lieux solides à des lieux de Pappus.

Dans la deuxième partie du calcul, à nouveau, Descartes est confronté à une discussion selon la position relative des points C, B et S, pour déduire CS de BS et BC, discussion comportant trois cas distincts. Les raisons en sont les mêmes que celles précédemment décrites. De la donnée de l'angle de projection sur la droite EF, Descartes déduit que le triangle CFS est donné d'espèce, et donc la proportion $CS : CF = z : e$. Il déduit ainsi finalement

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}.$$

On peut résumer le calcul cartésien par l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l} \text{AE} \\ \text{AB} \end{array} \} \rightarrow \text{BE} \rightarrow \text{BS},$$

$$\begin{array}{l} \text{BS} \\ \text{BC} \end{array} \} \rightarrow \text{CS} \rightarrow \text{CF}.$$

On obtient alors les expressions de CD et CH par symétrie sans le moindre calcul. En effet, l'algorithme est identique, seules changent les données qui sont au nombre de trois : l'abscisse du point d'intersection de la droite donnée avec l'axe des abscisses et les deux rapports correspondant aux rapports des côtés de deux triangles donnés d'espèce. Si on note \mathcal{A} cet algorithme, on a :

$$\begin{aligned} \text{CD} &= \mathcal{A}(0, \frac{z}{b}, \frac{z}{c}), \\ \text{CF} &= \mathcal{A}(k, \frac{z}{d}, \frac{z}{e}), \\ \text{CH} &= \mathcal{A}(l, \frac{z}{f}, \frac{z}{g}). \end{aligned}$$

²⁹Descartes le regrettera lui-même dans sa lettre à Debeaune du 20 février 1639. Cf. [Adam et Tannery, II, p 511].

Descartes déduira ensuite dans le Livre II de la *Géométrie*³⁰ de l'égalité (3) et des expressions précédentes l'équation quadratique en y

$$yy = \frac{(c f g l z - d e k z z)y + (b c g z x - c f g z x - d e z z x)y + b c f g l x - b c f g x x}{e z z z - c g z z}. \quad (4)$$

Cette équation est celle d'une conique dont il proposera la construction et la démonstration³¹. Ce faisant, Descartes considère explicitement *une* conique.

La question des signes

Mais revenons à la question des signes. On a vu que Descartes n'a traité qu'un seul des cas possibles³². Il ajoute néanmoins pour conclure au sujet des expressions des lignes CD, CF et CH :

[...] pour les signes +, & −, qui se ioignent à ces termes, ils peuuent estre changés en toutes les façons imaginables.³³

La remarque de Descartes est véritable et aisée à établir sur le plan algébrique. En effet, du fait des trois expressions possibles pour BE et CS, on obtiendrait *a priori* neuf équations, mais on trouve à deux reprises les mêmes expressions. On obtient ainsi sept équations qui correspondent bien à toutes les possibilités de changement de signe, à l'exception des trois signes −, soit $2^3 - 1$, puisque l'expression de CF est formée de trois termes, en sorte que la remarque de Descartes est bien fondée.

L'interprétation géométrique de ces changements de signe est naturellement liée à la position des droites. Il est aisé de reconnaître les neuf régions du plan correspondantes aux neuf expressions possibles décrites ci-dessus³⁴, comme on le voit dans la figure 2.

Pour terminer, il importe de remarquer que Descartes est ambigu sur les raisons qui pourraient justifier les trois positions différentes du point C au cours de l'analyse. On peut les compter au nombre de deux types : des changements de position des droites EF, AD ou GH³⁵, un changement de la

³⁰Cf. [Descartes 1637, p. 325] et [Adam et Tannery, VI, p. 398].

³¹Cf. [Descartes 1637, p. 325-334] et [Adam et Tannery, VI, p. 398-406].

³²À ces yeux peut-être le moins ambigu, puisqu'il conduit à une somme de quantités positives.

³³Cf. [Descartes 1637, p. 312] et [Adam et Tannery, VI, p. 385].

³⁴Dans le cas de AD, on n'aura que trois régions.

³⁵Par exemple, si la droite EF est placée dans la même position que la droite GH dans la figure 1, on obtiendra l'expression $k - x$. D'ailleurs, afin de traiter également ce second

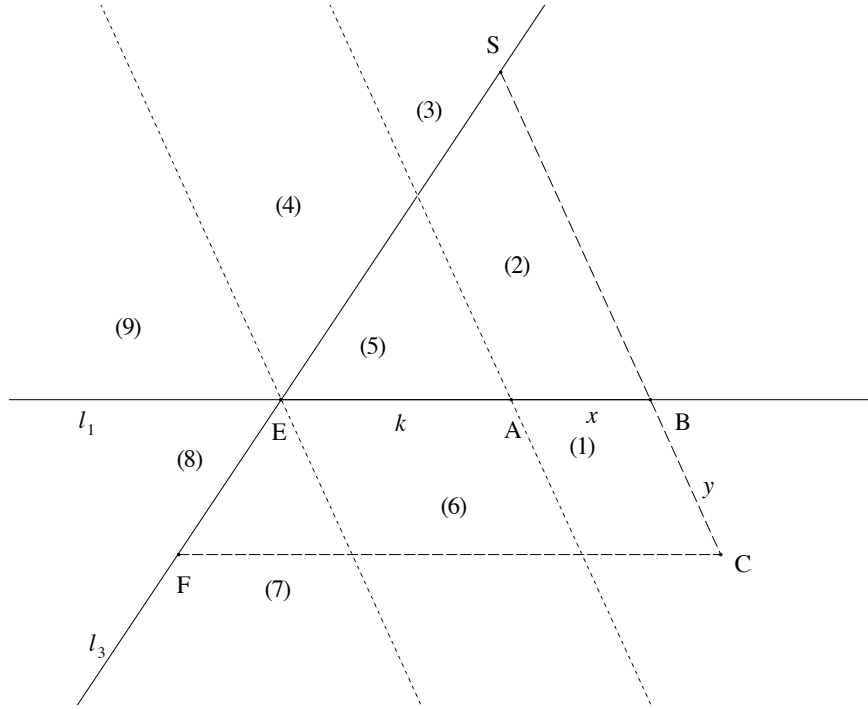


FIG. 2 – Les neuf régions du plan pour le calcul de CF

position du point C postulée dans l'analyse³⁶. Mais une différence essentielle et remarquable existe entre ces deux types de changement de position. Dans le premier cas, du fait du changement de configuration, le changement de l'équation finale s'accompagne du changement de la courbe géométrique solution, tandis que dans le second cas, il se peut — car la solution est formée d'un système de deux coniques — que bien que l'équation soit modifiée, la courbe solution ne le soit pas.

Si le premier type de changement de position renvoie à une recherche de généralité dans le traitement du problème, visant à considérer l'ensemble des positions possibles des droites AD , EF et GH , le second au contraire renvoie à la correspondance entre une courbe géométrique et une famille d'équations algébriques, exprimant chacune un arc de cette courbe

cas, Descartes choisit dans sa figure EF et GH de part et d'autre de AD qui fournit l'origine du repère.

³⁶Par exemple, si le point C est supposé dans la région délimitée par l'angle DAE dans la figure 1, on pourra obtenir les expressions $k - x$ et $x - k$ pour EB .

géométrique, déterminé par la position arbitraire du point C postulée au début de l'analyse.

Du point de vue de l'identification cartésienne recherchée entre courbe et équation, une telle ambiguïté nous paraît témoigner des difficultés mathématiques inhérentes à un tel projet. Nous allons voir en effet en étudiant la controverse sur la deuxième conique solution au problème de Pappus que cette ambiguïté ne concerne pas seulement l'exposition de Descartes dans la *Géométrie* de 1637.

3 Les controverses sur le problème de Pappus après la *Géométrie* : 1637-1649

Descartes, dans deux lettres à Mersenne datées par Adam-Tannery de fin décembre 1637 et janvier 1638, rappelle le caractère proprement nouveau de sa résolution de la question de Pappus³⁷ n'ayant « pû estre trouvée par aucun des anciens ; & [dont] on peut dire qu'elle ne l'a pû estre non plus par aucun des modernes »³⁸. Ce faisant, il oppose sa propre démarche à celle de restitution des œuvres perdues des Géomètres anciens, telles que les *Lieux plans* d'Apollonius, entreprises par Ghetaldi, Snellius ou Fermat³⁹.

À cette même époque, Roberval disposait pourtant d'une solution⁴⁰. C'est du moins ce qu'il affirme dans une lettre à Fermat du 4 août 1640, où il prétend l'avoir résolu « depuis plus de trois ans, quoique, pour n'y rien oublier, il ne [fallût] guère moins de discours qu'aux six premiers livres des *Éléments* »⁴¹.

³⁷Cf. resp. [Adam et Tannery, I, p. 478 et 491].

³⁸Cf. (*ibid.*, p. 478).

³⁹Cf. (*ibid.*, p. 478 n.).

⁴⁰Trois ans auparavant, dans une lettre à Mersenne d'avril 1634 selon Adam-Tannery, Descartes n'avait pas manqué pas de suggérer que la question de Pappus fut proposée au « Candidatus de la chaire de Ramus », et donc à Roberval. Cf. [Adam et Tannery, I, p. 288].

⁴¹Cf. [Henry et Tannery, II, p. 201]. Carcavi confirme ce témoignage dans sa lettre à Descartes du 24 septembre 1649, sur laquelle nous reviendrons dans la suite :

[...] & ayant pris vostre enonciation en mesme sens que vous, il m'en a fait voir la desmonstration, ainsi que ie vous ay dit, il y a tres-longtemps, & mesme la publia dés l'année 1637, en l'assemblée de quelques Messieurs qui conféroient des Mathematiques

Cf. [Adam et Tannery, V, p. 415].

Le parti-pris de Roberval dans son traitement du problème à trois et quatre lignes et sa prise en compte, semble-t-il, de la multiplicité des cas de figure apparaît radicalement différent de celui de Descartes qui vise à mettre en évidence la généralité de la question dans son rapport à une théorie des courbes algébriques. Les deux solutions de Descartes et Roberval apparaissent ainsi de style opposé : à la concision et aux ellipses du premier s'opposent la prolixité et les développements du second.

Fermat, de même, avait proposé dans une lettre à Roberval du 20 avril 1637 de lui envoyer ses solutions du lieu *ad tres et quatuor lineas*⁴². De ces deux solutions, seule nous est parvenue la première qui a été publiée par Henry-Tannery au premier tome de leur édition des *Oeuvres* de Fermat⁴³. Il s'agit d'une solution géométrique synthétique très élégante.

Néanmoins, bien que concurrentes, les deux solutions de Roberval et Fermat répondaient seulement au problème de Pappus à quatre lignes et non au problème de Pappus à un nombre quelconque de lignes, que Descartes prétendait avoir par contre résolu⁴⁴. Pour Descartes, une résolution générale et entière du problème de Pappus constituait donc un des enjeux premiers de la *Géométrie* de 1637 afin d'installer cette dernière en tête du mouvement de modernité mathématique issue d'un nouvel usage de l'algèbre pour la résolution de problèmes géométriques.

D'autre part, si Descartes dédaignait les restitutions des *Lieux plans* d'Apollonius entreprises par ses contemporains, c'est parce que le second enjeu qu'il poursuivait dans sa résolution du problème de Pappus était de donner la composition de tous les lieux solides. Ainsi écrivait-il dans la lettre bien connue à Mersenne du 31 mars 1638, où il se pose en Architecte lassé des plaintes des maçons à qui il laisse le travail des calculs, qu'il « [avait mis] dans la question de Pappus tout ce qu'il faut pour les sçavoir de plus pour

⁴²Cf. [Henry et Tannery, II, p. 105].

⁴³Cette solution a été publiée dans le premier tome des *Oeuvres* de Fermat. Cf. [Henry et Tannery, I, p. 87-89].

⁴⁴Il écrivait ainsi déjà à Mersenne dans une lettre datée par Adam-Tannery du 3 mai 1632 :

[...] ie n'ay pas bon esprit pour iuger [...] de ce que vous me mandez du probleme de Pappus : car il faut bien aller au delà des sections coniques & des lieux solides, pour le resoudre en tout nombre de lignes données, ainsi que le doit resoudre un homme qui se vante de *nullum problema solve*, & que ie pense l'avoir resolu.

Cf. [Adam et Tannery, I, p. 245].

les entendre⁴⁵ ». Dans la *Géométrie*, il en avait ainsi déduit ce qu'il nommait dans cette même lettre un « corollaire des lieux »⁴⁶. Du reste, n'avait-il pas déjà clôt sa solution du problème de Pappus dans la *Géométrie* au livre II par la remarque suivant ce même corollaire :

Mais le plus haut but qu'ayent eu les anciens en cete matiere a esté de paruenir a la composition des lieux solides : Et il semble que tout ce qu'Apollonius a escrit des sections coniques n'a esté qu'à dessein de la chercher.⁴⁷

Descartes ne pouvait donc que renvoyer plus tard Mersenne à la lecture de la *Géométrie* dans une lettre du 9 février 1639 et dédaigner la nouveauté de l'*Isagoge ad locos solidos* de Fermat qui lui avait été envoyé par Mersenne le 1^{er} mars 1638 selon Adam-Tannery. Ainsi écrivait-il :

C'est *Isagoge ad locos solidos* que vous m'auez cy deuant envoyé, & ie n'en desire point voir d'avantage, car ie donne tous ces lieux eu 2 livre de ma Geomet., en y construisant la question de Pappus, ainsy que i'ay auerti en la pa(ge) 334⁴⁸ ; & ceux qui y cherchent quelque autre chose, monstrent par la qu'ils ne les entendent pas.⁴⁹

*
* *

Néanmoins, Descartes reconnaissait bien à la même époque les mérites et l'avantage de la composition des lieux solides donnée par Fermat qui partait des équations algébriques du second degré à deux inconnues rapportant une courbe algébrique à un axe des coordonnées, puisqu'il écrivait à peine deux semaines plus tard, le 20 février 1639, à Debeaune :

Premierement, au lieu de m'être employé, depuis la page 324 iusques à 334, à construire la question de Pappus, & de n'avoir parlé des lieux apres cela qu'en forme de corollaire, i'eusse mieux fait d'expliquer par ordre tous les lieux, & de dire en suite que, par ce moyen, la question de Pappus estoit construite.⁵⁰

⁴⁵Cf. [Adam et Tannery, II, p. 83].

⁴⁶Cf. (*ibid.*, p. 82 et 84). Ce corollaire se trouve *in* [Descartes 1637, p. 334] et [Adam et Tannery, VI, p. 407].

⁴⁷Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 407].

⁴⁸Il s'agit du « corollaire » précédemment mentionné.

⁴⁹Cf. [Adam et Tannery, II, p. 495].

⁵⁰Cf. [Adam et Tannery, II, p. 510-511].

Auparavant, dans sa lettre à Mersenne du 31 mars 1638, Descartes avait indiqué plus précisément ce qu'il entendait et ce qui constituait à ses yeux au sein de la résolution du problème de Pappus une composition des lieux solides :

Or par cete seule equation de la page 326,

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}x^2}$$

a sçavoir en changeant seulement les marques + et −, ou supposant quelques termes pour nuls, ie comprends toutes celles qui peuvent se rapporter à quelque lieu plan ou solide. Je ne croy pas qu'il soit possible de rien imaginer de plus general, ny plus court, ny plus clair & facile que cela, ny que ceux qui l'auront vne fois compris doiuent apres prendre la peine de lire les longs escrits des autres sur mesme matiere.⁵¹

Ainsi, le traitement choisi par Descartes de l'équation obtenue par analyse algébrique du lieu de Pappus était de procéder à l'extraction des racines (positives) pour construire le lieu et pouvoir ainsi donner une composition des lieux solides dans les différentes coniques en s'appuyant sur la théorie des *Coniques* d'Apollonius.

Cette équation, qu'il jugeait parfaitement générale, présentait néanmoins plusieurs défauts sous ce même aspect qui allaient se révéler au cours des discussions et controverses. Les deux premiers étaient relevés par Descartes, toujours dans sa lettre à Debeaune du 20 février 1639 :

De plus, i'ay obmis le cas où il n'y a point d'*yy*, mais seulement *xy*, avec quelques autres termes, ce qui donne toujours un lieu à l'hyperbole, dont la ligne que i'ai nommée **AB** est asymptote, ou parallele à l'asymptote. Et en l'équation de la page 325, dont ie fais un modele pour toutes les autres, il n'y a aucun terme qui soit composé de quantités connues ; ce qui est bon pour la question de Pappus, à cause qu'il ne s'y en trouve iamais par la façon que ie l'ay reduitte ; mais il y en falloir mettre vn, pour ne rien obmettre touchant les lieux.⁵²

⁵¹Cf. (*ibid.*, p. 84).

⁵²Cf. [Adam et Tannery, II, p. 511].

Le second défaut reconnu ici par Descartes consistait en l'absence de terme constant qui résultait d'un choix de simplification de Descartes dans l'analyse algébrique du problème⁵³. Quant au premier, il s'agissait de l'oubli du cas où le coefficient de y^2 est nul. Bien que dans le cas où celui de x^2 ne le fût pas, la solution de Descartes eut pu être modifiée sans grandes difficultés, en échangeant x et y , restait le cas où ne figurait que xy qui correspondait à une hyperbole. Debeaune traiterait d'ailleurs plus tard cette « omission » dans ses *Notes Brèves*⁵⁴.

On remarquera qu'une fois de plus des conceptions auparavant présentées par Descartes comme gravées dans le marbre de la *Géométrie* ne laissent pas de changer et d'évoluer au gré de la discussion scientifique souvent vive avec les mathématiciens contemporains. Ceux-ci proposaient à la même époque des théories et des méthodes originales et concurrentes de celle produite par celui qui se voulait l'apôtre de la nouveauté et de la modernité en mathématiques, surpassant les Anciens là où d'autres ne faisaient que les restituer. Ces méthodes rencontraient du reste parfois plus de succès dans la communauté scientifique à l'exemple de la méthode des tangentes de Fermat, qui allait également influencer les conceptions cartésiennes sur le problème.

Face aux prétentions cartésiennes touchant la résolution du problème de Pappus, allait donc s'élever un certain nombre de voix, de 1637 jusqu'à 1648, pour dénoncer des erreurs et des manquements dans la solution donnée dans la *Géométrie* de 1637. Si celles-ci, au départ de peu de poids, ne feront d'abord que susciter le mépris de Descartes, on verra que l'année 1648 constituera un tournant décisif.

Ce changement s'exprimera par l'arrivée d'une critique nouvelle et profonde de Roberval communiquée en 1649 par Carcavi, relative à l'ignorance supposée de Descartes de la seconde conique solution au problème de Pap-

⁵³Cf. *supra* la section 2.3, p. 12.

⁵⁴Debeaune, dans une lettre à Schooten que nous datons de juin 1648 — nous renvoyons pour les justifications de cette datation à [Maronne 2005] et [Maronne 2006] — recommande ainsi à ce dernier de joindre une dernière observation à ses *Notes Brèves* « afin qu'il ne reste rien à désirer touchant ces lieux ». Cf. [Adam et Milhaud, III, p. 322]. Comme l'ont montré Adam-Milhaud en comparant les deux copies et la traduction latine de 1649 des *Notes Brèves*, cette observation, qui ne figure pas dans la première version des *Notes* de Debeaune, est la cinquième observation dans l'édition latine. Cf. [Adam et Milhaud, III, p. 357-358 et p. 364-365]. Cette note répond bien la critique de Descartes au sujet de sa classification des lieux solides déduite de sa solution du problème de Pappus dans sa lettre à Debeaune du 20 février 1639 et développe ainsi entre autres considérations le cas où il n'y aurait pas de y^2 dans l'équation du lieu de Pappus.

pus, et par des réactions cartésiennes bien différentes, renvoyant semble-t-il à quelque embarras de l'Auteur vis à vis de la solution qu'il avait tant prisee et vantée dans les années précédentes.

Mais avant d'en arriver là, il nous faut d'abord narrer les épisodes de la controverse avec Roberval depuis 1637 jusqu'à 1646.

3.1 La controverse avec Roberval : 1638-1646

Comme on le sait bien, la controverse entre Roberval⁵⁵ et Descartes commença dès 1638⁵⁶ et prit pour point de départ la querelle au sujet de la méthode des tangentes de Fermat.

Des doutes et critiques de Roberval au sujet de la solution cartésienne du problème de Pappus, plus précisément pour ce qui regarde la composition des lieux solides, apparaissent à travers la réponse donnée par Descartes dans la lettre à Mersenne du 31 mars 1638. Descartes écrit ainsi :

Pour ce qui est de connoistre a quel lieu l'equation faite [pour le lieu de Pappus] appartient, que vous dites que M^r de Roberval eut desire que i'eusse mis en ma Geometrie, s'il luy plaist de lire depuis la penultieme ligne de la page 326 iusques a la page 332⁵⁷, & de le rapporter au corollaire des lieux, page 334⁵⁸, il trouvera que ie les ay mis tous exactement.⁵⁹

Ainsi, l'enjeu que nous avons décrit auparavant portant sur l'équivalence entre la résolution du problème de Pappus à quatre lignes et la composition des lieux solides, enjeu clairement mis en avant par Descartes dans la *Géométrie* et dans la Correspondance, n'avait pas été à cette époque reconnu par Roberval, mais plutôt vraisemblablement dénié par ce dernier.

La controverse avec Roberval allait se poursuivre dans la suite par différentes remarques d'abord plus ou moins de détail, puis de plus en plus

⁵⁵Pour une narration des épisodes de la dispute entre Descartes et Roberval, plus particulièrement pour la période 1646-1649, on peut consulter l'étude de Paul Tannery [Tannery 1926, Chap. IV, « La seconde dispute entre Roberval et Descartes »].

⁵⁶On connaît la lettre de Roberval contre Descartes datée par Adam-Tannery d'avril 1638 et se terminant par une recension critique de la *Géométrie* : [Adam et Tannery, II, p. 114]. Celle-ci ne comporte pas de remarques sur le problème de Pappus.

⁵⁷Descartes renvoie ici à sa construction du problème de Pappus à quatre lignes. Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 399-405].

⁵⁸Cf. (*ibid.*, p. 406-407).

⁵⁹Cf. [Adam et Tannery, II, p. 84].

[illegible]

Ceux qui reprenent les figures de ma *Diontrieque & Geome-*

est très vraisemblable que Roberval fut parmi les détracteurs de la telle remarque car elle apparaîtra plus tard, sous une forme différente, et encore plus pertinente, sous son nom dans la Correspondance de Desargues et Carcavi de 1649.

⁶⁰Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 402].

⁶¹Cf. la figure 3.

Cette remarque sur la figure donnée par Descartes dans la *Géométrie*, figure gravée par van Schooten, futur éditeur des *Geometria* de 1649 et 1659-1661, est tout à fait véritable et pertinente car, de fait, la figure est fausse. Si celle-ci sera reprise dans les éditions suivantes, c'est vraisemblablement parce qu'une nouvelle impression sur bois eût été trop coûteuse.

En effet, il est tout à fait clair que les coniques solutions du problème de Pappus à quatre lignes donné par l'égalité $CB \cdot CF = CD \cdot CH$, ne peuvent couper les quatre droites données de position AB , AD , EF et GH qu'en quatre de leur six points d'intersection : les points A et G , ainsi que les points d'intersection des droites AD et EF , et des droites EF et GH , absents tous deux sur la figure de Descartes⁶³. En effet, dès lors qu'un point de la courbe appartient à l'une des quatre droites, soit par exemple AB , l'expression BC devient nulle, ce qui implique par conséquent $CD = 0$ ou $CH = 0$. Dans le premier cas, le point C coïncide ainsi avec le point A tandis que dans le second cas on obtient le point G qui aurait dû être le point d'intersection de l'hyperbole avec la droite GH apparaissant sur la figure. Aussi, toute autre intersection avec les quatre droites, comme celle indiquée sur la figure de van Schooten, est impossible.

Notons que la remarque faite à Descartes ne semblait pas porter sur la fausseté de la figure, comme ce sera le cas plus tard, mais bien plutôt sur son caractère incomplet. Quant à la réponse emportée de Descartes, elle étonne car elle n'effleure pas, peut-être par mauvaise foi et à dessein, le véritable enjeu sous-tendu par la critique. Ainsi, dire que les intersections de la courbe solution avec les quatre droites du problème « ne servent de rien au sujet » paraît au mieux exagéré. On verra que Descartes reviendra plus tard plus en détail sur une observation semblable.

*
* *

La controverse ne s'était toujours pas éteinte en 1646. À cette époque, Roberval semblait toujours poursuivre Descartes de ses questions et critiques. Descartes, dans une lettre à Mersenne qu'on suppose du 2 mars 1646, exigeait de la part de son contradicteur qui prétendait que sa solution était incomplète, de mettre ses critiques et sa solution par écrit. Roberval s'en était en effet auparavant entretenu avec Mersenne qui l'avait rapporté à Descartes. Piqué au vif, ce dernier n'avait pas voulu différer de répondre avec acrimonie en recensant les fautes contenues dans l'*Aristarque* de Roberval :

⁶³Cf. *supra* la figure 1, p. 10.

La premiere est que M. de Roberval dit que ie n'ay pas resolu le lieu de Pappus, & qu'il a vn autre sens que celui que ie luy ay donné. Sur quoy ie vous supplie tres-humblement de luy vouloir demander, de ma part, quel est cet autre sens, et qu'il prenne la peine de le mettre par écrit, afin que ie le puisse mieux entendre. Car, puis qu'il dit qu'il s'est offert de me le demonstrier, lorsque i'estois à Paris, (comme, de fait, ie croy qu'il m'en a dit quelque chose, mais ie ne sçay plus du tout ce que c'est), il ne me doit pas refuser cette faueur [...]⁶⁴

La première critique, dénoncée par Descartes, concerne le sens qu'il aurait accordé au texte de Pappus⁶⁵, lorsqu'il écrit dans la *Géométrie* que :

[Pappus] aiouste que les anciens en avoient imaginé une qu'ils montraient y estre utile, mais qui sembloit la plus manifeste, & qui n'estoit pas toutefois la premiere.⁶⁶

Descartes identifie en effet la parabole cartésienne à cette courbe solution, visant ainsi rhétoriquement à légitimer et à fonder son choix d'une courbe solution très particulière solution du problème de Pappus à cinq lignes. Quand on sait que cette courbe est la seule véritablement traitée par Descartes dans cette même solution, et qu'il use de celle-ci pour la construction des problèmes sursolides, une légitimation par les Anciens ne pouvait apparaître qu'utile, bien que non absolument nécessaire. Ainsi, si la traduction de Descartes était sans doute assez libre, la remarque de Roberval ne pouvait que lui apparaître anodine, « rien qui concernast la Geometrie, mais seulement la Grammaire », dirait-il plus tard à Mersenne dans une lettre du 12 octobre 1646⁶⁷.

Plus tard, dans une lettre datée par Adam-Tannery de septembre 1646 et adressée à Mersenne contre Descartes, Roberval persistait en indiquant à la fin de celle-ci que

[...] dans sa Geometrie imprimée, on [pouvait] luy faire le mesme reproche touchant le lieu ad tres & quatuor lineas qu'a faict, sur le mesme suiect, Apollonius à Euclide.⁶⁸

Ainsi, Descartes n'aurait « pas fait la synthèse complète du lieu à 3 ou 4 lignes, mais seulement celle d'une partie de ce lieu, prise au hasard, et cela,

⁶⁴Cf.[Adam et Tannery, IV, p. 363].

⁶⁵On peut consulter l'éclaircissement de Tannery : [Adam et Tannery, IV, p. 365-366].

⁶⁶Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 380].

⁶⁷Cf. [Adam et Tannery, IV, p. 526].

⁶⁸Cf. [Adam et Tannery, IV, p. 507-508].

assez peu heureusement »⁶⁹. Roberval s'offrait ensuite de satisfaire le Père Mersenne sur ce dernier point, ce qu'il ne fit jamais à notre connaissance. Il apparaît en filigrane dans cette citation de la Préface du Livre I des *Coniques* une question importante qui va réapparaître en 1648 assortie d'une accusation : celle de la complétude de la solution cartésienne.

Que conclure de ces épisodes de la controverse entre Descartes et Roberval, présentant des critiques assez anodines à l'exception de celle sur les intersections de la courbe solution avec les quatre droites du problème et de la dernière sur l'incomplétude de la solution cartésienne ? Il semble que durant toutes ces années, bien que Roberval ne fût pas convaincu par la solution cartésienne, bien qu'il ait semble-t-il disposé selon son témoignage d'une solution au problème à quatre lignes, comme Fermat, à aucun moment il n'ait pu véritablement mettre Descartes en difficulté sur un point mathématique d'enjeu important, quoiqu'il ait promis par ailleurs. Une telle situation semble donc montrer que Roberval fût incapable durant cette époque de comprendre véritablement en profondeur le problème de Pappus, et par là les défauts de la solution cartésienne.

3.2 La controverse de 1648

La situation va changer radicalement en 1648 avec une nouvelle solution apportée au problème de Pappus à trois et quatre lignes par Pascal.

La lettre de Descartes à Schooten de mars-avril 1648

Dans une lettre à Schooten au sujet de l'édition latine de la *Géométrie* que nous datons de mars-avril 1648⁷⁰, Descartes, après avoir négligemment répondu à Schooten au sujet des *Notes Brèves* — car il savait que Debeaune y pourvoirait ⁷¹ — développait bien plus précautionneusement des arguments contre une « remarque de N. », proposant même à Schooten d'insérer un avertissement dans son édition latine :

Pour la remarque de N., elle est impertinente, encore qu'elle ne soit pas tout à fait fausse. Car on sçait bien que, les mesmes lignes droites étant posées & la question n'estant point changée, le lieu

⁶⁹Cf. (*ibid.*, p. 508, n.).

⁷⁰Nous renvoyons pour les justifications de cette datation à [Maronne 2005] et [Maronne 2006].

⁷¹Cf. la lettre de Debeaune à Schooten de juin 1648 : [Adam et Milhaud, III, p. 321-322].

ne peut pas estre tout ensemble au cercle & à l'hyperbole. Et il ne faut pas aussi avoir grande science pour connoistre que la ligne courbe doit passer en cet exemple par les quatre intersections qu'il remarque. Car, dans la figure de la page 325⁷², on voit à l'œil que, puisque CB multipliée par CF doit produire vne somme égale à CD multipliée par CH, le point C se rencontre necessairement aux quatre intersections susdites, à sçavoir : en l'intersection A, pour ce qu'alors les lignes BC & CD sont nulles, & par consequent, estant multipliées par les deux autres, elles composent deux riens, qui sont égaux entr'eux ; tout de mesme, en l'intersection G, les lignes CH & CB sont nulles ; & ainsi, en l'une des deux autres intersections qui ne sont pas marquées dans la figure, CD & CF, & dans l'autre, CH & CF sont nulles. Mais on peut changer la question, en sorte que le mesme n'arriue point ; et cela n'empesche pas que, voulant vser de briueuté et rapporter tous les cas à vn seul exemple, comme i'ay fait, (à sçavoir, ie les ay tous rapportéz à l'exemple proposé dans la figure de la page 311⁷³), ie n'aye eu raison, apres avoir donné le vray lieu de cet exemple, qui est vn cercle, d'y appliquer aussi l'hyperbole, afin que, toutes les lettres IKLB CD &c. s'y trouvant aux mesmes lieux qu'auparauant, on pust entendre le peu que i'en voulois dire, plus facilement qu'on n'eust fait si la figure eust esté changée. Il me semble donc que vous ne deuez point y mettre d'autre figure ; car il faudroit aussi changer le discours, & la solution en seroit plus embroüillée. Mais vous pourrez mettre cet aduertissement dans la page 331⁷⁴, ou quelqu'autre semblable.⁷⁵

Si auparavant Descartes avait répondu dédaigneusement aux attaques contre sa solution du problème de Pappus, celui-ci répond ici à la fois de façon bien plus nuancée et plus détaillée à cette remarque « pas tout à fait fausse » par un éclaircissement inséré avec quelques modifications et additions par Schooten dans les éditions latines de la *Géométrie*⁷⁶.

⁷²Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 398]. Il s'agit de la figure avec un cercle solution qui passe par les points A et G. Cf. la figure 4.

⁷³Cf. (*ibid.*, p. 384) et la figure 1.

⁷⁴Cf. (*ibid.*, p. 403).

⁷⁵Cf. [Adam et Tannery, II, p. 576].

⁷⁶Cf. [van Schooten 1649, p. 196-197] et [van Schooten 1661, I, p. 224-225].

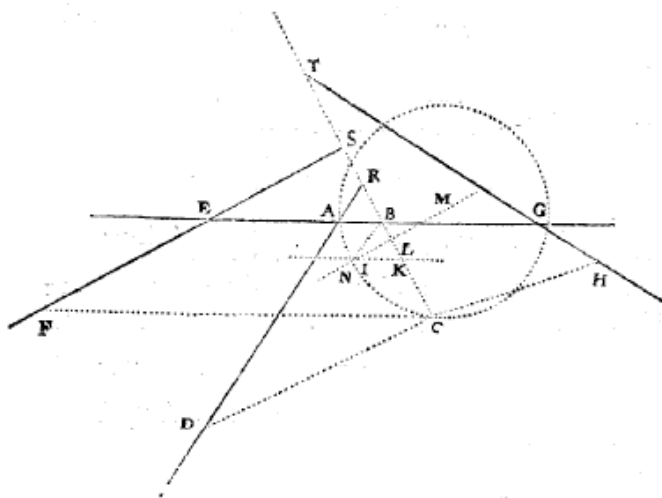


FIG. 4 – *Géométrie*(1637), p. 331 et *Geometria*(1649), p. 32

La remarque est double. D'une part, le lieu de Pappus peut-il être formé à la fois d'une hyperbole et d'un cercle ? De façon plus générale, est-il formé de deux coniques ? D'autre part, la figure faisant apparaître le cercle solution de la page 325⁷⁷ n'est-elle pas incomplète du fait que la ligne courbe ne passe pas par les quatre points d'intersection des quatre droites ? N'est-il pas abusif également d'user de la même figure dans le cas du cercle et de l'hyperbole ?

Comme l'indiquent Adam-Tannery, Roberval avait fait à Descartes un reproche préfigurant la seconde remarque en 1642⁷⁸ et on peut donc penser à la suite de Adam-Tannery que « N. » peut désigner Roberval. La réponse de Descartes portant sur les quatre points d'intersection des quatre droites données de position du problème qui appartiennent à la ligne courbe solution est tout à fait claire. À nouveau, comme en 1642, celui-ci indique que là ne réside pourtant pas l'enjeu du problème de Pappus et qu'une telle remarque est anodine.

Du reste, l'hypothèse que l'ensemble de ces remarques proviennent de Roberval est renforcée par un autre épisode apparaissant dans la Correspondance du printemps 1648 avec Mersenne. Le 4 avril 1648, Descartes, furieux, se plaint dans une lettre à Mersenne de l'envoi par celui-ci de remarques de

⁷⁷Cf. la figure 4.

⁷⁸Cf. [Adam et Tannery, II, p. 580]. Nous avons mentionné dans la section précédente cette critique.

Roberval à Schooten contre sa *Géométrie*⁷⁹ :

Au reste, ie n'ai pû lire sans quelque indignation ce que vous me mandez auoir escrit au S^r. Schooten, touchant ma Geometrie, & vous m'en excuserez, s'il vous plaist. l'admire votre credulité : vous auez vû plusieurs fois tres clairement, par experience, que ce que le Roberval disoit contre mes escrits estoit faux & impertinent, & toutefois vous supposez que i'y doy changer quelque chose, a cause que Roberval dit qu'il manque quelque chose en ma solution *du lieu ad 3 & 4 lineas*, comme si les visions d'un tel homme deuoient estre considerables. Ma Geometrie est comme elle doit estre pour empescher que le Rob. & ses semblables n'en puissent medire sans que cela tourne a leur confusion ; car ils ne sont pas capables de l'entendre, & ie l'ay composée ainsi tout a dessein, en y omettant ce qui estoit le plus facile, & n'y mettant que les choses qui en valoient le plus la peine. Mais ie vous avouë que, sans la considération de ces esprits malins, ie l'aurois escrite tout autrement que ie n'ay fait, & l'aurois renduë beaucoup plus claire ; ce que ie feray peutestre encore quelque iour, si ie voy que ces monstres soient assez vaincus ou abaissez.⁸⁰

Ajoutons pour terminer que la première partie de la remarque de Roberval sur la nature de la solution du lieu de Pappus semble démontrer une plus grande maîtrise et compréhension du problème mathématique sous-jacent : la solution est en effet bien formée par un système de deux coniques, ce que Descartes passe sous silence — par négligence ou à dessein — dans sa propre résolution du problème, comme semble l'avoir remarqué Roberval. De surcroît, comme l'observent Adam-Tannery⁸¹, Descartes répond à tort que « le lieu ne peut estre tout ensemble au cercle et à l'hyperbole ». Cette réponse erronée contraste avec le soin apporté par Descartes à joindre un avertissement qui sera reproduit plus tard par Schooten dans l'édition latine de 1649. Celui-ci n'aurait-il pas considéré tous les cas de figure possibles, et ce faisant n'aurait pas fait la synthèse complète du lieu ?

⁷⁹Cf. [Adam et Tannery, V, p. 141-144].

⁸⁰Cf. [Adam et Tannery, V, p. 143].

⁸¹Cf. [Adam et Tannery, II, p. 580].

Une solution de Pascal

On trouve dans la correspondance de Huygens une lettre de Mersenne à Constantin Huygens qu'on date du 17 avril 1648⁸², portant sur un nouveau développement de la polémique engagée par Roberval contre la solution par Descartes du problème de Pappus. Cette reprise de la polémique résultait peut-être d'une nouvelle solution au problème apparemment complète, apportée par le jeune Blaise Pascal. Voici ce qu'écrivait alors Mersenne :

Si votre Archimède [Christiaan Huygens] vient avec vous, nous lui ferons voir l'un des plus beaux traitez de Geometrie qu'il ayt jamais vû, qui vient d'estre achevé par le jeune Paschal. C'est la solution du lieu de Pappus ad 3 et 4 lineas *qu'on pretend icy n'avoir pas esté résolu par Mr des Cartes en toute son estendüe*. il a fallu des lignes rouges, vertes et noires etc. pour distinguer la grande multitude de considérations [configurations ?].⁸³

Dans le traité cité par Mersenne intitulé par Leibniz *De loco solido* et aujourd'hui perdu, Pascal donnait en effet une solution projective du problème de Pappus à quatre lignes, reposant sur différentes définitions et propriétés de l'hexagramme mystique⁸⁴.

3.3 La correspondance avec Carcavi de 1649

On retrouve à nouveau des critiques de Roberval visant la solution cartésienne du problème de Pappus en 1649⁸⁵. Celles-ci furent transmises par Carcavi dans une première lettre du 9 juillet 1649⁸⁶ à laquelle Descartes répondit le 17 août 1649⁸⁷, et dans une seconde lettre du 24 septembre 1649⁸⁸ laissée cette fois-ci sans réponse par Descartes qui interrompit alors sa Correspondance avec Carcavi.

Dans sa première lettre, ce dernier indiquait trois critiques :

⁸²Cf. [Waard et Beaulieu, XVI, p. 229] et [Huygens, XXII, p. 425 n.].

⁸³Cf. [Huygens, I, p. 83-84] et [Waard et Beaulieu, XVI, p. 230].

⁸⁴Pour plus de détails, cf. l'article de R. Taton : [Taton 1962, p. 214 et p. 225-231].

⁸⁵La controverse reprend également en 1656, cette fois-ci entre Roberval et Van Schooten, dans la Correspondance de Huygens à l'occasion de la préparation par Schooten de la seconde édition latine de la *Géométrie*. Nous étudions cet épisode dans notre article [Maronne 2006] et dans la partie consacrée au problème de Pappus dans [Maronne].

⁸⁶Cf. [Adam et Tannery, V, p. 373].

⁸⁷Cf. [Adam et Tannery, V, p. 394-397].

⁸⁸Cf. [Adam et Tannery, V, p. 415-416, Éclaircissement, p. 422-425].

1. Page 326⁸⁹. Que le point C est par tous les angles que vous avez nommez, & que vous ne nommez point celui ou il ne peut estre ; & que iamais la question n'est impossible.⁹⁰

Les deux premières critiques de Roberval concernent la présence possible du point C dans chacun des quatre secteurs angulaires définis par Descartes dans sa solution du problème de Pappus, à savoir les angles \widehat{DAG} , \widehat{DAE} , \widehat{EAR} et \widehat{RAG} .

Il est clair que ces critiques renvoient implicitement à la seconde conique solution, ce qui sera confirmé par la seconde lettre de Carcavi à Descartes. En effet, en soutenant que le point C peut être choisi à l'intérieur de chacune des régions délimitées par un des quatre angles, et donc que la conique « traversera » ces quatre angles, Roberval regarde donc la figure 4 et la solution de Descartes comme incomplètes.

Quant à la troisième critique, elle renvoie à une remarque de Descartes tout à fait générale apparaissant dans sa solution du problème, énonçant que dans le cas où les équations obtenues dans chacun des quatre angles ne possèdent pas de racines (positives) non nulles, « la question serait impossible au cas proposé »⁹¹.

Que doit-on entendre ici par « impossible » ? Car une valeur nulle pour y donnera néanmoins le point A pour solution. Et c'est sans doute ce qu'entend par là Roberval, lorsqu'il écrit que le problème ne sera jamais impossible. En effet, dans le cas où les quatre droites soient sécantes, les points d'intersection seront toujours solution et selon les cas conduiront à une solution formée par un point (si les quatre droites sont concourantes) ou par un couple de droites. Enfin, si les quatre droites sont parallèles, il est aisé de démontrer qu'on obtiendra une droite.

Pour Descartes, qui semble mentionner implicitement le cas du point dans la lettre à Mersenne précédemment citée du 31 mars 1638⁹², comme « un cas, des plus aysez de tous, qu'[il a] omis pour sa trop grande facilité », on pourrait considérer qu'il qualifiait ici le problème de lieu d'impossible, refusant de compter le point au sein des coniques solutions, reprenant ainsi la distinction traditionnelle d'origine euclidienne entre point et ligne.

Descartes répondait à chacune de ces trois critiques dans la lettre qui

⁸⁹Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 398-399].

⁹⁰Cf. [Adam et Tannery, V, p. 373].

⁹¹Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 399].

⁹²C'est l'hypothèse de Tannery. Cf. [Adam et Tannery, II, p. 84].

suivait du 17 août 1649 :

A quoy ie n'ay pas besoin de rien adioûter pour faire voir clairement qu'il se trompe, premierement en ce qu'il dit le point C est *par tous les angles que i'ay nommés*. Car, en l'exemple proposé, il ne se peut trouver dans l'angle DAE [...] Ainsi le cercle CA passe par les angles DAG & EAR, mais non point par l'angle DAE.

[...] Il est evident aussi qu'il se trompe, en ce qu'il dit que ie n'ay pas nommé l'angle où le point C ne peut estre ; car, ayant nommé tous les quatre angles qui se sont par l'intersection des deux lignes DR et EG, i'ay nommé toute la superficie indefiniment estenduë de tous costez, & par consequent tous les lieux, tant ceux où le point C peut estre, que ceux où il ne peut pas estre ; en sorte qu'il auroit esté superflu que i'eusse considéré d'autres angles.

Enfin, il se trompe de dire que cette question n'est iamais impossible ; car, bien qu'elle ne le soit pas en la façon que ie l'ay proposée, on la peut proposer en plusieurs autres, dont quelques-unes sont impossibles, & ie les ay voulu toutes comprendre dans mon discours.⁹³

Force est de constater que ces réponses ne sont guère convaincantes. Dans la première, après avoir engagé une polémique stérile sur le sens accordé par Roberval à « se trouver par les angles »⁹⁴, Descartes ne paraît considérer que le cercle comme unique conique solution au problème, cercle en effet qui ne passe pas par l'angle DAE. Il paraît donc ignorer à nouveau et de façon plus explicite encore la seconde conique solution.

Quant aux deux autres réponses, elles demeurent évasives. Si dans la dernière, Descartes invoque à nouveau un souci de généralité pour justifier sa remarque, dans la première, apparaissent au contraire, il nous semble, les limites de la démarche cartésienne inhérentes au non traitement des quantités négatives et aux difficultés de calcul apparaissant dans une résolution complète du problème de Pappus.

En effet, pour nommer l'angle où le point C ne peut être, il faut non pas étudier une équation algébrique exemplaire, comme le fait Descartes dans sa solution de la *Géométrie*, mais toutes les équations algébriques produites en choisissant toutes les positions possibles pour le point C, puis comparer leurs coefficients, afin d'étudier et comparer les racines — en particulier, le

⁹³Cf. [Adam et Tannery, V, p. 395-397].

⁹⁴Cf. (*ibid.*, p. 395-396).

signe de ces racines — de ces dernières. Une telle recension ne peut être que compliquée et fastidieuse mais est nécessaire pour qui veut proposer une théorie des courbes algébriques où une correspondance est établie entre courbe géométrique et équation(s) algébrique(s).

Mais Carcavi allait revenir à la charge en présentant des critiques bien plus fondées et pertinentes sur le plan mathématique :

[1] Il [Roberval] ne s'est pas aussi arrêté aux figures de vostre livre, mais seulement à vostre enonciation ; car celle de la page 331⁹⁵ monstre evidemment le peu d'intelligence de celui à qui vous vous estes fié pour la tracer : c'est ou le lieu est représenté par une hyperbole, laquelle, ne passant par aucun des six points où les quatre lignes peuvent s'entrecouper, coupe neantmoins la ligne TG au point H, fort éloigné de tous ces six points, qui est une absurdité si manifeste, qu'encore que ledit sieur de Roberval croye que vous ne vous soyez pas donné la peine de construire ce lieu, il ne doute pas toutesfois que vous ne la voyiez incontinent. [2] De mesme que celle de la page 308⁹⁶, où vous dites que, *pour trois ou quatre lignes données, les points cherchez se rencontrent tous en une section conique* ; ce qui n'est pas veritable : car ils ne se trouvent pas tous dans une de ces sections, quand vous prendriez les deux hyperboles opposées pour une section, comme nous faisons avec les Anciens. [3] Et il m'a fait remarquer que cette faute peut bien avoir esté cause d'une autre dans la page 313⁹⁷, où vous dites qu'*on pourra trouver une infinité de points par lesquels on décrira la ligne demandée*. Car il se pourra faire que tous ces points ne seront pas dans une mesme ligne, sçavoir, lors que quelques-uns d'iceux seront dans l'un des espaces qui sont distinguez par les quatre lignes données, & d'autres en un autre espace. [4] Et finalement, il s'outient que vous ne sçauriez donner aucun cas auquel la question ne soit tousiours possible [...]⁹⁸

Ces quatre dernières critiques de Roberval ne reçurent jamais de réponse de Descartes. Leur clairvoyance et leur profondeur contrastent avec le caractère anecdotique des remarques des premières années. Les deux premières

⁹⁵Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 404] et figure 4.

⁹⁶Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 381].

⁹⁷Cf. [Adam et Tannery, VI, p. 381].

⁹⁸Cf. [Adam et Tannery, V, p. 415-416].

et la dernière critiques apparaissent comme un point d'aboutissement de la controverse et touchent selon nous au coeur de la théorie cartésienne des courbes algébriques.

Ainsi, la figure 3 est clairement fausse et témoigne selon Roberval que Descartes « ne [se soit] pas donné la peine de construire ce lieu ». Au delà de la charge polémique, il faut retenir que Roberval met ici en lumière les difficultés de la correspondance entre équation algébrique et courbe géométrique. Mais plus importante encore est la deuxième critique. Roberval énonce en effet pour la première fois explicitement que la solution de Descartes est incomplète car elle ne considère qu'une conique solution et en déduit une conséquence qui attaque les fondements de la théorie cartésienne des courbes algébriques.

La construction point par point de la courbe géométrique solution que tire Descartes de l'équation algébrique exprimant celle-ci relativement à l'axe **AB** d'origine **A** et d'ordonnées **BC** ne va en effet pas de soi. Si l'on veut construire toute la courbe point par point, il faudra résoudre chacune des équations en y obtenues, non pas en « prenant successivement infinies diverses grandeurs »⁹⁹ pour x , mais en se restreignant à un intervalle pour x correspondant à la région où l'on a supposé que le point **C** se trouvait pour l'analyse. On construira ainsi l'arc de la courbe appartenant à cette même région. Ainsi, pour construire *toute* la courbe solution, il faudra « recoller » ces différents arcs.

Mais apparaît ici un problème fondamental pour la théorie cartésienne des courbes algébriques du fait de l'existence d'une deuxième conique solution, et c'est là que réside tout l'enjeu d'une telle question. Car Descartes ne nous dit rien sur la façon d'opérer le recollement des arcs de courbe géométrique. S'il n'existait qu'une conique solution, une telle opération serait fastidieuse et sans enjeu. En revanche, comme c'est le cas ici, du fait qu'il existe deux coniques solutions, on pourra recoller ensemble des arcs des deux courbes si l'on ne dispose pas d'un critère permettant d'affirmer si deux équations données expriment les arcs d'une même ou de deux courbes géométriques distinctes.

Un tel critère est une condition nécessaire pour l'établissement d'une théorie des courbes algébriques et apparaît difficile voire impossible à établir en raison de la complexité résultant des différents signes possibles comme on l'a vu auparavant lors de l'analyse mathématique. Or Descartes ne dit non

⁹⁹Cf. [Descartes 1637, p.313] et [Adam et Tannery, VI, p. 386].

seulement rien à ce sujet, mais encore esquivé à plusieurs reprises la question qui en constitue l'origine dans la controverse : l'existence d'une seconde conique solution.

4 Conclusion

Au delà de la question de savoir si Descartes a reconnu ou non la seconde conique solution — la seconde possibilité heurte notre bon sens —, on peut remarquer pour conclure que le véritable enjeu de cette question tient d'une part à la reconnaissance non pas d'une deuxième *courbe géométrique* solution mais d'une deuxième *courbe algébrique* solution, d'autre part à la possibilité de différencier les deux courbes algébriques solutions, ce qu'a réalisé Descartes, bien qu'avec quelques ellipses et difficultés, dans un cas particulier du problème de Pappus à cinq lignes avec la parabole cartésienne¹⁰⁰.

Si Descartes n'ignorait sans doute pas qu'une seconde courbe géométrique fût solution, il devait tout autant savoir que la démonstration de ce résultat dans le cadre de sa théorie des courbes algébriques serait à la source de difficultés considérables qui pourraient révéler les fragilités des fondations de la théorie algébrique de la *Géométrie*.

Cela explique peut-être, plutôt que l'ignorance, les silences et les esquives répétés de Descartes sur cette question durant la controverse avec Roberval, à la suite de la solution donnée par Pascal, concurrente véritable de la solution cartésienne, tant pour ce qui regarde la généralité que la puissance de la Méthode.

D'autre part, l'histoire de la controverse sur la solution cartésienne du problème de Pappus que nous avons donnée ici en étudiant la Correspondance nous semble apporter un premier élément de démonstration des relations qui existent entre ce que nous avons appelé dans notre introduction les « quatre Géométries ». Mais de quelle nature sont ces relations ?

La Géométrie de la Correspondance, en tant qu'elle se manifeste à travers les réponses de Descartes aux questions des disciples ou aux critiques des adversaires, nous semble apparaître comme un moyen terme entre la *Géométrie* de 1637 et la *Geometria* de 1649.

¹⁰⁰Cf. [Descartes 1637, p. 335-338] et [Adam et Tannery 1974, p. 408-410]. Nous étudions en détail la solution de Descartes selon la même problématique dans la partie consacrée au problème de Pappus dans [Maronne].

Par là, nous voyons que si certaines conceptions de Descartes exprimées dans la *Géométrie* de 1637 sont stables et peuvent être ainsi éclairées, d'autres apparaissent comme changeantes et soumises à évolution, en tant qu'elles sont confrontées à d'autres dans la discussion et la controverse scientifique.

Références

- Adam, Charles, et Gérard Milhaud, éd. 1936-1963. *Descartes, Correspondance*. Paris : 8 vols., Alcan-PUF.
- Adam, Charles, et Paul Tannery, éd. 1964-1974. *Œuvres de Descartes*. Paris : (nouvelle édition), 11 vols., Vrin.
- Belgioioso, Giulia, éd. 1990. *Descartes, Il metodo e i saggi. Atti del Convegno per il 350^e anniversario della pubblicazione del Discours de la Méthode e degli Essais, 2 vols.* Firenze : Armando Paoletti.
- Bos, Henk J.M. 1981. « On the representation of curves in Descartes' *Géométrie* ». *Archive for history of exact sciences* 24 :295–338.
- . 1990. « The structure of Descartes' *Géométrie* ». [*Belgioioso 1990*]. p. 349–369.
- . 2001. *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York : Springer.
- Costabel, Pierre. 1990. « La *Géométrie* que Descartes n'a pas publiée ». [*Belgioioso 1990*]. 371–385.
- Descartes, René. 1637. « La *Géométrie* ». In *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique. Les Meteores. Et la Geometrie qui sont des essais de cette Methode*, 297–413. Leyde : I. Maire.
- Dingeldey, F., E. Fabry, et L. Berzolari. 1911-1915. « *Géométrie algébrique plane* ». In *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, édité par Jules Molk, Volume 3 de *Tome III—Géométrie*. Gauthier-Villars.
- Galuzzi, Massimo. 1985. « Recenti interpretazioni della *Géométrie* di Descartes ». In *Scienza e Filosofia : saggi in honore di Ludovico Geymonat*, édité par C. Mangioni, 643–663. Milano : Garzanti.
- . 1990. « I *marginalia* di Newton alla seconda edizione latina della

- Geometria* di Descartes e i problemi ad essi collegati ». [*Belgioioso 1990*]. 387–417.
- Giusti, Enrico. 1990. « Numeri, grandezze e Géométrie ». [*Belgioioso 1990*]. 419–439.
- . 2000. *La naissance des objets mathématiques*. Trad. G. Barthelemy. Paris : Ellipses.
- Henry, Charles, et Paul Tannery, eds. 1891-1922. *Œuvres de Fermat*. Paris : 5 vols., Gauthier-Villars.
- Huygens, Christiaan. 1888-1950. *Œuvres Complètes publiées par la Société Hollandaise des Sciences*. La Haye : 22 vols., Martinus Nijhoff.
- Jullien, Vincent. 1996. *Descartes. La Géométrie de 1637*. Philosophies. Paris : PUF.
- . 1999. « Les Frontières dans les Mathématiques Cartésiennes ». *Historia Scientiarum* 8 (3) : 211–238.
- Maronne, Sébastien. « La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie de Descartes : 1637-1649 ». Ph.D. diss., sous la direction de Marco Panza. Université Paris 7, Paris.
- . 2005. « Sur une lettre de Descartes qu'on dit de 1639 — Version abrégée de [Maronne 2006] — ». *Alvearium. Rivista dell' Centro Interdipartimentale di Studi su Descartes e il seicento* : www.cartesius.net/Alvearium.html.
- . 2006. « Sur une lettre de Descartes qu'on dit de 1639 ». *Revue d'Histoire des Mathématiques (à paraître)*.
- Molland, George. 1976. « Shifting the foundations : Descartes' transformation of ancient geometry ». *Historia Mathematica* 3 :21–49.
- Panza, Marco. 2005. *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*. Sciences dans l'Histoire. Librairie Albert Blanchard.
- Pappus, d'Alexandrie. 1982. *La Collection Mathématique*. Édité par Paul ver Eecke (trad. et notes). Paris : 2 vols., Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.
- Tannery, Paul. 1926. « La Correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques ». In *Mémoires Scientifiques*, édité par Gino Loria, Volume VI, 149–268. Paris/Toulouse : Gauthiers-Villars.
- Taton, René. 1962. « L'œuvre de Pascal en géométrie projective ». *Revue d'Histoire des Sciences* XV :197–252.

- van Schooten, Frans, éd. 1649. *Geometria à Renato des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; nunc autem...* Leyde : Louis & Daniel Elzevier.
- , éd. 1659-1661. *Geometria à Renato des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem...* Amsterdam : 2 vols., Louis & Daniel Elzevier.
- Waard, Cornélis de, et Armand Beaulieu, éd. 1945-1986. *Correspondance du P. Marin Mersenne, Religieux Minime*. Paris : 17 vols., PUF/CNRS.